Τοπολογικές Ομάδες Πινάκων

Ορισμός

Ο καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

π.χ. $\mathbb{R}^2$

Ορισμός

Μια πράξη στο σύνολο X είναι μια απεικόνιση $\oplus : X \times X \to X$

$(x_1, x_2) \mapsto x_1 \oplus x_2$

LOOK >>>
όταν λέω ότι έχω πράξη θα είναι καλά ορισμένη

Ορισμός

Αν το σύνολο X είναι εφοδιασμένο με μια πράξη $\oplus : X \times X \to X$ ώστε να ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

α) προσεταιριστική $(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)$ $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$

β) $\exists x_0 \in X$ ώστε $x_1 \oplus x_0 = x_1 = x_0 \oplus x_1$ $\forall x_1 \in X$

Το x_0 καλείται ουδέτερο στοιχείο για την πράξη $\oplus$.

γ) $(\forall x_1 \in X)(\exists x_2 \in X)$ ώστε $x_1 \oplus x_2 = x_0 = x_2 \oplus x_1$

Το x_2 καλείται αντιθετοαντίστροφο του x_1

Το ζεύγος $(X, \oplus)$ καλείται ομάδα ~

Ορισμός

Αν επιπλέον, ισχύει $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$ τότε το $(X, \oplus)$ θα καλείται αβελιανή ομάδα.

Παράδειγμα

Όλες είναι άπειρα σύνολα

α) $(\mathbb{Z}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα

β) $(\mathbb{N}, +)$ δεν είναι ομάδα

γ) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ δεν είναι ομάδα

δ) $(\mathbb{Q}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.

ε) $(\mathbb{Q}, \cdot)$ δεν είναι ομάδα
στ) $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα
ζ) $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα
η) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ είναι αβελιανή ομάδα
θ) Το $\mathbb{R}^n$ με πράξη κατά συντεταγμένες
$(x_1, \dots, x_n) + (x_1', \dots, x_n') = (x_1 + x_1', \dots, x_n + x_n')$ είναι αβελιανή ομάδα.
είναι και διανυσματικός χώρος

ΠΡΟΤΑΣΗ
Αν το $(X, \oplus)$ είναι ομάδα, τότε το ουδέτερο στοιχείο x_0 είναι μοναδικό, όπως και το αντίθετο αντίστροφο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
πλήθος στοιχείων

$1 \to$ τετριμμένη $\{x_0\}$ $\quad x_0 \oplus x_0 = x_0$

$2 \to \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ $\quad \bar{0} + \bar{1} = \bar{1}$

γεννήτορας $\leftarrow \bar{1}$ $\quad \bar{1} + \bar{1} = \bar{0} \to$ σχέση γεννήτορα

$3 \to \mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ $\quad \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$

$4 \to \mathbb{Z}_4, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{\underbrace{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})}_{2 \text{ γεννήτορες}}\}$

$\mathbb{Z}_4 \to$ κυκλική, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to$ μη κυκλική
αβελιανές

$(\bar{1}, \bar{0}) + (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{0}, \bar{0})$
$(\bar{0}, \bar{1}) + (\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{0})$

$5 \to \mathbb{Z}_5$

$6 \to \mathbb{Z}_6, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ (είναι ισόμορφες)

το 2 και το 3 είναι πρώτα μεταξύ τους, άρα είναι ισόμορφες.

$\to S_3$ μη αβελιανή
περιέχει όλες τις 1-1 απεικονίσεις
$\{f : \{1, 2, 3\} \xrightarrow{1-1} \{1, 2, 3\}\}$ με τη σύνθεση.
$S_3 \leq \langle f, g \rangle$ όπου

f	g
$1 \to 2$	$1 \to 1$
$2 \to 3$	$2 \to 3$
$3 \to 1$	$3 \to 2$

- $f \circ f \circ f =$ ταυτοτική
- $g \circ g =$ ταυτ.
- $g \circ f \circ g = f \circ f$

Ορισμος

Μια απεικόνιση φ μεταξύ ομάδων $(X, \oplus)$ και $(Y, \odot)$ θα καλείται ομοιομορφισμός αν ισχύει $\varphi: (X, \oplus) \to (Y, \odot)$

$$\varphi(x_1 \oplus x_2) = \varphi(x_1) \odot \varphi(x_2)$$

Ισχύει ότι $\varphi(x_0) = y_0$ με x_0 ουδέτερο της X και y_0 ουδέτερο της Y

Ορισμος

- Η φ καλείται μονομορφισμός αν επιπλέον είναι και 1-1
- Η φ καλείται επιμορφισμός αν είναι επί.
- Η φ καλείται ισομορφισμός αν είναι 1-1 και επί.

Με τη βοήθεια των ισομορφισμών η κατηγορία (το "σύνολο") των ομάδων χωρίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς τους ισομορφισμούς.

Παραδειγμα

- Η $(\mathbb{R}, +)$ είναι ισόμορφη με την $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ $\forall a > 1$, τότε η $\varphi(t) = a^t$ είναι ισομορφισμός

$\varphi(t + t') = a^{t+t'} = a^t a^{t'} = \varphi(t)\varphi(t')$ ομομορφισμός

$\varphi(t) = \varphi(t') \iff a^t = a^{t'} \iff a^{t-t'} = 1 \iff t - t' = 0 \iff t = t'$

Επί $\forall b \in \mathbb{R}^+$, $\exists t = \log_a b$

- Η $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ δεν είναι ισόμορφη με την $(\mathbb{R}^+, \cdot)$

$\mathbb{R}^+$ 0 ———— $+\infty$ συνεκτικός

$\mathbb{R}$ $-\infty$ ———— 0 ———— $+\infty$ μη συνεκτικός

Στοιχεία τάξης 2 $a^2=1$

$\mathbb{R}^+: a^2=1 \Rightarrow a=1$ (κανένα στοιχείο τάξης 2)

$\mathbb{R}^*: a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$ (1 στοιχείο τάξης 2 το -1) το 1 με τον εαυτό του όσες φορές και να πολ/σεις θα παίρνεις 1.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Ο ομομορφισμός $\varphi:(X,\oplus)\to(Y,\odot)$ είναι 1-1 αν-ν $\varphi^{-1}(y_0)=\{x_0\}$. Με x_0 ουδέτερο της X και y_0 ουδέτερο της Y

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$\varphi:(\mathbb{R}^+,\cdot)\to(\mathbb{R}^*,\cdot)$

$\varphi^{-1}(1)=\{1,-1\}$

Το $\mathbb{R}$ με τις δύο πράξεις $+,\cdot$.

$(\mathbb{R},+)$ αβελιανή ομάδα.

$(\mathbb{R}^*,\cdot)$ αβελιανή ομάδα

$a(b+c)=ab+ac \quad \forall a,b,c\in\mathbb{R}$ (επιμεριστική)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα σύνολο $\mathbb{F}$ εφοδιασμένο με δύο πράξεις $\oplus$, $\odot$ θα καλείται σώμα αν ισχύουν

α) $(\mathbb{F},\oplus)$ αβελιανή ομάδα

β) $(\mathbb{F}\setminus\{0\},\odot)$ είναι αβελιανή ομάδα

↑ είναι το ουδέτερο της $\oplus$

γ) $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{F}$

Παραδειγμα

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$ όπου p πρώτος

Το $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ με την πρόσθεση $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ είναι αβελιανή ομάδα.
Ας ορίσουμε γινόμενο $(a, b) \odot (a', b') = (aa', bb')$ θα εξετάσουμε αν το $\mathbb{R}^2$ με αυτές τις πράξεις είναι σώμα.

→ $(a, b) \odot (1, 1) = (a, b)$

→ $(a, b) \oplus (0, 0) = (a, b)$

Ερωτημα

Στο $\mathbb{R}$, $a, b \neq 0 \Rightarrow ab = 0$;

$\Downarrow$

$\exists a^{-1} \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow a^{-1}ab = 0 \Rightarrow 1 \cdot b = 0 \Rightarrow b = 0$ Άτοπο!

Στο $\mathbb{F}$, $a, b \neq 0 \Rightarrow a \odot b = 0$;

$\Downarrow$

$\exists a^{-1} \Rightarrow a \odot b = 0 \Rightarrow a^{-1} \odot ab = 1 \odot b = 0 \Rightarrow b = 0$ Άτοπο!

Επομένως,

Προταση

Έστω $\mathbb{F}$ σώμα και $a, b \neq 0$ (το ουδέτερο της $\oplus$). Τότε $a \odot b \neq 0$.

Παραδειγμα

$$\left.\begin{array}{l}(0, 1) \neq (0, 0) \\ (1, 0) \neq (0, 0)\end{array}\right\} (0, 1) \odot (0, 1) = (0 \cdot 1, 1 \cdot 0) = (0, 0)$$

Άρα το $\boxed{\mathbb{R}^2}$ δεν είναι σώμα, με την παραπάνω πράξη πολ/μου. Όμως, αν ορίσουμε $(a, b) \odot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$
Τότε το $\mathbb{R}^2$ γίνεται σώμα.

• Η παραπάνω πράξη είναι αβελιανή καθώς:
$(a,b)\odot(a',b') = (a',b')\odot(a,b)$
• Η προσεταιριστική επίσης ισχύει.

• Ουδέτερο στοιχείο της πράξης:
$(a,b)\odot(1,0) = (a-0,\ a\cdot 0+b\cdot 1) = (a,b)$

• $\forall (a,b)\neq(0,0)\ \exists!\,(a',b')$ με $(a,b)\odot(a',b')=(1,0)$
$\hookrightarrow a^2+b^2\neq 0$

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

Ο $\mathbb{R}^2$ είναι διανυσματικός χώρος (Δ.Χ.) $\Rightarrow$ έχει βάση με δύο στοιχεία $(1,0)$, $(0,1)$ τα οποία θα γράφουμε:
$(1,0)\to 1$
$(0,1)\to i$

$(a,b) = a(1,0)+b(0,1) = a\cdot 1+bi = a+bi$
$(0,1)\odot(0,1)\to i\odot i$
$(0\cdot 0-1\cdot 1,\ 0\cdot 1+1\cdot 0) = (-1,0)\to -1$
Άρα $i\odot i=-1$.
Επομένως $\mathbb{R}^2$ σώμα και θα το γράφουμε:
$\boxed{\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}\} \text{ με } i^2=-1}$

$\mathbb{R}\leq\mathbb{R}^2\simeq\mathbb{C}\leq\boxed{\mathbb{R}^3}$

$\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}\} = \langle 1,i\rangle \leq \langle 1,i,j\rangle$

Κάθε στοιχείο του νέου "σώματος" θα γράφεται σαν $a+bi+cj$ με $a,b,c\in\mathbb{R}$ και $i^2=-1$ και $j^2=-1$

Αφού έχουμε πολ/μο στον $\mathbb{R}^3$ $i\cdot j = a+bi+cj$ για κάποια $a,b,c\in\mathbb{R}$

$i^2 j = i(i\cdot j) = i(a+bi+cj) = ai+bi^2+cij \Rightarrow$
$-j = ai-b+cij \Rightarrow -j = ai-b+c(a+bi+cj) \Rightarrow$
$-j = ai-b+ca+cbi+c^2 j \Rightarrow -j = -b+ca+i(a+cb)+c^2 j$
$-j = c^2 j \Rightarrow c^2 = -1$ Ατοπο, καθώς $c\in\mathbb{R}$

Επομένως, το $\mathbb{R}^3$ δεν είναι σώμα με τις προηγούμενες πράξ.

Εξετάζουμε το ίδιο για τον $\boxed{\mathbb{R}^4}$

$\mathbb{R} \leq \mathbb{C} \leq \mathbb{R}^4 = \langle 1, i, j, k\rangle = \{a+bi+cj+dk\}$, όπου $a,b,c,d\in\mathbb{R}$
και $i^2 = -1 = j^2 = k^2$
$ij \in \mathbb{R}^4$ (υποτίθεται $\mathbb{R}^4$ σώμα)
$ij = a+bi+cj$ (Δεν γίνεται, από το προηγούμενο $\mathbb{R}^3$)

Άρα $ij = a+bi+cj+dk$ για κάποια $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Μετά από πράξεις, όπως προηγουμένως, $ij = k$ κ' $ji = -k$
$ji = a+bi+cj+dk$.

Άρα το $\mathbb{R}^4 = \langle 1, i, j, k\rangle$ με τις πράξεις του παρακάτω πίνακα είναι σώμα;

$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	j
j	j	-k	-1	i
k	k	-j	-i	1

Ο πολ/μος δεν είναι αντιμεταθετικός

$ij = k \neq -k = ji$

Έχει ουδέτερο το 1.
Είναι προσεταιριστικός (πράξεις)

Έχει κάθε μη μηδενικό στοιχείο αντίστροφο στοιχείο;

Δηλαδή, αν $a+bi+cj+dk \neq 0$ (1)

$\exists$ ο $(a+bi+cj+dk)^{-1}$ ώστε $(a+bi+cj+dk)(a+bi+cj+dk)^{-1} = 1$;

(1) $\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$ κ' >0

$$\frac{a}{a^2+b^2+c^2+d^2} - \frac{b}{a^2+b^2+c^2+d^2}i - \frac{c}{a^2+b^2+c^2+d^2}j - \frac{d}{a^2+b^2+c^2+d^2}k$$

$\downarrow$

Άρα αυτό το πολλ/σω με $a+bi+cj+dk$ θα ισούται με 1.

$z \cdot \frac{\bar{z}}{\|z\|^2} = 1$

Επομένως, το $\mathbb{R}^4 = <1, i, j, k>$ συμβολίζεται με $\mathbb{H}$ (Halmitonians) και καλείται διαιρετικός δακτύλιος των τεταρτονίων.

Ονομάζεται διαιρετικός δακτύλιος, καθώς ο αντίστροφος είναι διαιρε-ση.

Είναι "σχεδόν" σώμα, χωρίς την αντιμεταθετικότητα

Ανακεφαλαίωση

$$\underbrace{\mathbb{R} \leq \mathbb{C}}_{\text{σώμα}} \underset{\nexists \mathbb{R}^3}{\leq} \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$$